DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2010.04.003
第27卷 第4期 黑龙江大学自然科学学报 Vol.27 No.4
2010年8月 JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY August, 2010

一个包含两个Smarandache函数的方程及其正整数解

李彩娟
(西北大学 数学系,西安 710127)

摘 要:研究两个包含Smarandache LCM函数SL(n)及伪Smarandache函数Z(n)方程的可解性,即方程Z(n)=SL(n),Z(n)+1=SL(n),利用初等及解析方法获得了该方程的所有正整数解,证明了下面两个结论:(1)对任意正整数n>1,方程Z(n)=SL(n)有正整数解当且仅当$n=p^{\alpha}\cdot m$,其中p为奇素数,$\alpha\geqslant 1$及m为$\frac{p^{\alpha}+1}{2}$的任意大于1的因数;(2)对任意正整数n>1,方程Z(n)+1=SL(n)有正整数解当且仅当$n=p^{\alpha}\cdot m$,其中p为奇素数,$\alpha\geqslant 1$及m为$\frac{p^{\alpha}-1}{2}$的任意因数。

关键词:Smarandache LCM函数;伪Smarandache函数;函数方程;正整数解
中图分类号:O156.4 文献标志码:A 文章编号:1001-7011(2010)04-0446-03

0 引言及结论

对任意正整数n,著名Smarandache LCM函数SL(n)定义为最小正整数k使得$n\mid[1,2,\cdots,k]$,这里$[1,2,\cdots,k]$表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数。许多学者对这个函数进行了研究并取得了重要的结果,参阅文献[1-2],例如乐茂华[2]讨论了方程SL(n)=S(n)的可解性,并完全解决了该问题,即证明了:任何满足该方程的正整数可表示为n=12或者$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$,其中$p_1,p_2,\cdots,p_r,p$是不同的素数且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是满足$p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,\cdots,r$的正整数,其它相关结论参阅文献[3]。

函数Z(n)定义为最小正整数k使得$n\mid\frac{k(k+1)}{2}$,即$Z(n)=\min\left\{m:m\in N,n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$。该函数也被称为伪Smarandache函数。关于这个函数的初等性质,虽然至今知道的不多,但已吸引不少学者进行研究,并获得了一些有价值的研究成果,参阅文献[4-5]。例如:Kenichiro Kashihara和David Gorski研究了函数Z(n)的初等性质,并且证明了一些有趣的结果:

1. 对任意的素数$p\geqslant 3$,$Z(p)=p-1$;
2. 对任意的素数$p\geqslant 3$和任意的$k\in N$,$Z(p^k)=p^k-1$;
3. 对任意的$k\in N$,$Z(2^k)=2^{k+1}-1$;
4. 对任意整数$k>0$,如果n不能表示为2^k的形式,那么$Z(n)<n$。

本文主要目的是研究方程

$$Z(n)=SL(n),\quad Z(n)+1=SL(n)$$

的可解性,并利用初等及解析方法获得了该方程的所有正整数解,证明了下面两个结论:

定理1 对任意正整数n>1,方程

$$Z(n)=SL(n)$$

有正整数解当且仅当$n=p^{\alpha}\cdot m$,其中p为奇素数,$\alpha\geqslant 1$及m为$\frac{p^{\alpha}+1}{2}$的任意大于1的因数。

收稿日期:2009-11-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:李彩娟(1985-),女,硕士研究生,主要研究方向:数论,E-mail:lcj12342000@126.com

定理 2 对任意正整数 $n>1$, 方程

$$Z(n)+1=SL(n)$$

有正整数解当且仅当 $n=p^{\alpha}\cdot m$, 其中 p为奇素数, $\alpha\geqslant 1$及 m为 $\frac{p^{\alpha}-1}{2}$的任意因数。

1 定理的证明

定理 1的证明 “⇒”事实上, 当 $n=1$, 显然有 $Z(n)=SL(n)$。经验证当 $n=2, 3, 4, 5$时, n不满足方程 $Z(n)=SL(n)$, 于是假定 $n\geqslant 6$且满足方程 $Z(n)=SL(n)$, 不妨令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$为 n标准素因数分解式, 且 $p_1<p_2<p_3\cdots<p_r$, 并令 $Z(n)=SL(n)=k$, 由函数 $Z(n)$及 $SL(n)$的定义可知 k是最小正整数使得 n满足下面的两个整除式:

$$n\mid[1, 2, \cdots, k],\qquad n\mid\frac{k(k+1)}{2}$$

由函数 $SL(n)$的性质: 对任意正整数 n, 有 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}\}$, 由此可以推出 $k=p^{\alpha}$且 $p^{\alpha}\geqslant p_i^{\alpha_i}$, $i=1, 2, 3, \cdots, r$。

I 当 k是奇数时:

由 $Z(n)=SL(n)=k$, $k=p^{\alpha}$得 $Z(n)=SL(n)=p^{\alpha}$。根据 $SL(n)$的上述性质, 令 $n=p^{\alpha}\cdot m$, $p^{\alpha}=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}\}$, 且 $\alpha\geqslant 1$。不妨设 $p^{\alpha}=p_r^{\alpha_r}$, 则 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i\geqslant 1$且 $p^{\alpha}>p_i^{\alpha_i}$, $i=1, 2, 3, \cdots, r-1$。

当 $m=1$, $n=p^{\alpha}$时, 由函数 $Z(n)$和 $SL(n)$的性质知: $Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$, $SL(p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 显然 $Z(n)\neq SL(n)$, 所以 $m=1$不满足方程。

当 $m>1$, $n=p^{\alpha}m$时, 因为 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i\geqslant 1$且 $p^{\alpha}>p_i^{\alpha_i}$, $i=1, 2, 3, \cdots, r-1$。所以根据函数 $SL(n)$的性质可知 $SL(p^{\alpha}\cdot m)=p^{\alpha}$, 由 $Z(n)=SL(n)$, 知且 $Z(p^{\alpha}\cdot m)=p^{\alpha}$, 此时根据函数 $Z(n)$的定义有: $p^{\alpha}m\mid\frac{p^{\alpha}(p^{\alpha}+1)}{2}$, 得 $m\mid\frac{p^{\alpha}+1}{2}$, 所以 $m>1$且 $m\mid\frac{p^{\alpha}+1}{2}$满足方程。

II 当 k是偶数时:

$Z(n)=SL(n)=k$, $k=p^{\alpha}$得 $Z(n)=SL(n)=2^{\alpha}$。根据 $SL(n)$的上述性质, 令 $n=2^{\alpha}\cdot m$, $2^{\alpha}=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_r^{\alpha_r}\}$, 且 $\alpha\geqslant 1$。不妨设 $2^{\alpha}=p_r^{\alpha_r}$, 则 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i\geqslant 1$且 $2^{\alpha}>p_i^{\alpha_i}$, $i=1, 2, 3, \cdots, r-1$。

当 $m=1$, $n=2^{\alpha}$时, 由函数 $Z(n)$和 $SL(n)$的性质知: $Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$, $SL(2^{\alpha})=2^{\alpha}$, 要满足方程必须有 $2^{\alpha+1}-1=2^{\alpha}$, 即 $\alpha=0$, 解得 $n=1$, 这与 $n\geqslant 6$矛盾。所以此时条件不满足方程。

当 $m>1$, $n=2^{\alpha}m$时, 根据函数 $SL(n)$的性质可知 $SL(2^{\alpha}\cdot m)=2^{\alpha}$, 由 $Z(n)=SL(n)$, 知 $Z(2^{\alpha}m)=2^{\alpha}$, 根据函数 $Z(n)$的定义知: $2^{\alpha}m\mid\frac{2^{\alpha}(2^{\alpha}+1)}{2}$, 于是有 $2m\mid 2^{\alpha}+1$, 显然不成立。所以此时条件不满足方程。

综上可知, 满足方程 $Z(n)=SL(n)$的条件是 $n=p^{\alpha}\cdot m$, 其中 p为奇素数, $\alpha\geqslant 1$及 m为 $\frac{p^{\alpha}+1}{2}$的任意大于 1的因数。

“⇐”由于 $m\mid\frac{p^{\alpha}+1}{2}$, 可得 $m<p^{\alpha}$, 故根据函数 $SL(n)$的性质可知 $SL(n)=p^{\alpha}$, 另外 $Z(n)=p^{\alpha}$, 这是因为当 p为奇素数且 $\alpha\geqslant 1$时, n不能整除 $\frac{p^{\alpha}(p^{\alpha}-1)}{2}$, 否则由 $(p^{\alpha}, m)=1$知 $m\mid\frac{p^{\alpha}-1}{2}$, 又 $m>1$这与 $m\mid\frac{p^{\alpha}+1}{2}$矛盾。

所以满足条件 $n=p^{\alpha}\cdot m$, 其中 p为奇素数, $\alpha\geqslant 1$及 m为 $\frac{p^{\alpha}+1}{2}$的任意大于 1的因数的值是方程 $Z(n)=SL(n)$的解。

综合以上几种情况, 即完成定理 1的证明。

定理 2的证明 与定理 1的证明方法相似, 这里只给出大概的证明过程。

"⇒"显然 $n=1,2$不满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$。于是假定 $n\geqslant 3$时满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$,不妨设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$为 n标准素因数分解式,并令 $Z(n)+1=SL(n)=k$,由函数 $Z(n)$及 $SL(n)$的定义可知 k是最小正整数使得 n满足下面的两个整除式:

$$n\mid[1,2,\cdots,k],\quad n\mid\frac{k(k-1)}{2}。$$

由函数 $SL(n)$的性质:可以推出 $k=p^{\alpha}$且 $p^{\alpha}\geqslant p_i^{\alpha_i}$, $i=1,2,3,\cdots,r$。

Ⅰ当 k是奇数时:

由 $Z(n)+1=SL(n)=k$, $k=p^{\alpha}$得 $Z(n)+1=SL(n)=p^{\alpha}$。根据 $SL(n)$的上述性质,令 $n=p^{\alpha}\cdot m$, $p^{\alpha}=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}$,且 $\alpha\geqslant 1$。不妨设 $p^{\alpha}=p_r^{\alpha_r}$,则 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i\geqslant 1$且 $p^{\alpha}>p_i^{\alpha_i}$, $i=1,2,3,\cdots,r-1$。

当 $m=1$, $n=p^{\alpha}$时, $Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$, $SL(p^{\alpha})=p^{\alpha}$,显然 $Z(n)+1=SL(n)$,所以 $m=1$满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$。

当 $m>1$, $n=p^{\alpha}$时, $SL(p^{\alpha}\cdot m)=p^{\alpha}$且 $Z(p^{\alpha}\cdot m)=p^{\alpha}-1$,根据函数 $Z(n)$的定义知 $p^{\alpha}m\mid\frac{p^{\alpha}(p^{\alpha}-1)}{2}$,所以 $m\mid\frac{p^{\alpha}-1}{2}$。得 $m>1$, $m\mid\frac{p^{\alpha}-1}{2}$满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$。

Ⅱ当 k是偶数时:

由 $Z(n)+1=SL(n)=k$, $k=p^{\alpha}$知:

当 $m=1$, $n=2^{\alpha}$时, $SL(2^{\alpha})=2^{\alpha}$, $Z(2^{\alpha})=2^{\alpha+1}-1$,要满足方程必须有 $2^{\alpha+1}-1+1=2^{\alpha}$,即 $\alpha+1=\alpha$,显然不成立。所以此时条件不满足方程。

当 $m>1$, $n=2^{\alpha}$时, $SL(2^{\alpha}\cdot m)=2^{\alpha}$,要满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$,需 $Z(p^{\alpha}\cdot m)=2^{\alpha}-1$,由函数 $Z(n)$的定义知 $2^{\alpha}m\mid\frac{2^{\alpha}(2^{\alpha}-1)}{2}$,于是 $m\mid\frac{2^{\alpha}-1}{2}$,显然不成立。故此时条件不满足方程。

综上可知,满足方程 $Z(n)+1=SL(n)$的条件是 $n=p^{\alpha}\cdot m$,其中 p为奇素数, $\alpha\geqslant 1$及 m为 $\frac{p^{\alpha}-1}{2}$的任意的因数。

"⇐"由于 $m\mid\frac{p^{\alpha}-1}{2}$,可得 $m<p^{\alpha}$,故根据函数 $SL(n)$的性质可知 $SL(n)=p^{\alpha}$,另外 $Z(n)=p^{\alpha}-1$,这是因为 $m\mid\frac{p^{\alpha}-1}{2}$, $\alpha\geqslant 1$知, $p^{\alpha}m\mid\frac{p^{\alpha}(p^{\alpha}-1)}{2}$,所以 $Z(n)\leqslant p^{\alpha}-1$又根据 $Z(n)$的性质: $Z(n)\geqslant\max\{Z(m):m\mid n\}$,易知 $Z(n)\geqslant Z(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$,故 $Z(n)=p^{\alpha}-1$。

所以满足条件 $n=p^{\alpha}\cdot m$,其中 p为奇素数, $\alpha\geqslant 1$及 m为 $\frac{p^{\alpha}-1}{2}$的任意的因数的值是方程 $Z(n)+1=SL(n)$的解。

综合以上几种情况,即完成定理 2的证明。

参考文献

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报, 2008, 38(2): 173-176
[2] LE Maohua. Two function equations[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.
[3] 王 妤. 一个包含 Smarandache LCM function对偶函数方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(5): 645-647.
[4] KENICHIRO K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Vail: USA: Erhus University Press, 1996.
[5] DAVID G. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.
[6] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

(下转第 **454**页)

[5] WANG Q D, ZHAO L, WANG T F. On CLUR points of Orlicz spaces[J]. Annales Polonici Mathematici, 2000, LXXIII(2): 147—157.
[6] MUSIELAK J. Orlicz spaces and modular spaces[R]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
[7] CHEN S T. Geometry of Orlicz spaces[D]. Warsaw: Polish Academy of Science, 1996.
[8] RAO M M, REN Z D. Theory of Orlicz spaces[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1991.
[9] HUDZIK H, YE Y N. Support functionals and smoothness in Musielak-Orlicz sequence spaces endowed with the Luxemburg norm[J]. Comment Math Univ Carolin, 1990, 31(4): 661—684.
[10] HUDZIK H, ZBASZYNIAK Z. Smoothness in Musielak-Orlicz spaces equipped with the Orlicz norm[J]. Collect Math, 1997, 48(4—6): 543—561.
[11] CAO L Y, WANG T F. Some notes about K(x)≠∅ in Musielak-Orlicz spaces[J]. Natur Sci J Harbin Normal Univ, 2000, 16(4): 1—4.
[12] WU C X, SUN H Y. Norm calculation and complex convexity of Musielak-Orlicz sequence spaces[J]. Chinese Ann Math, 1991, 12A(Special Issue): 98—102.
[13] KAMIŃSKA A. Flat Orlicz-Musielak sequence spaces[J]. Bull Acpol Math, 1982, 30: 347—352.
[14] ZUO M X, CUI Y A. H-property in Musielak-Orlicz sequence spaces[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2003, 20(4): 5—10.
[15] CUI Y A, HUDZIK H, ZUO M X. On S-points of Musielak-Orlicz sequence spaces[J]. Acta Math Sinica, 2007, 50(5): 1117—1128.

赋 Orlicz范数 Musielak-Orlicz序列空间中的紧局部一致凸点

左明霞
(哈尔滨理工大学 数学系, 哈尔滨 150080)

摘　要: 给出了赋 Orlicz范数 Musielak-Orlicz序列空间中的紧局部一致凸点的判别准则, 从而得到了赋 Orlicz范数的 Musielak-Orlicz序列空间是紧局部一致凸的充分必要条件。

关键词: Musielak-Orlicz序列空间; Orlicz范数; 紧局部一致凸点

(上接第 **448**页)

An equation involving two Smarandache functions and its positive integer solutions

LI Cai-juan
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: The main purpose is studying the solvability of the equations $Z(n)=SL(n)$ and $Z(n)+1=SL(n)$ involving the Smarandache LCM function $SL(n)$ and the pseudo Smarandache function $Z(n)$. By using the elementary and analytic methods, all positive integer solutions of those equations are obtained. The following two conclusions are proven: (1) For any positive integer $n>1$, the equation $Z(n)=SL(n)$ have positive integer solutions if and only if $n=p^{\alpha}\cdot m$, where p is odd prime, $\alpha\geqslant 1$ and $m>1$, $m\left|\frac{p^{\alpha}+1}{2}\right.$; (2) For any positive integer $n>1$, the equation $Z(n)+1=SL(n)$ have positive integer solutions if and only if $n=p^{\alpha}\cdot m$, where p is odd prime, $\alpha\geqslant 1$ and $m\left|\frac{p^{\alpha}-1}{2}\right.$.

Key words: Smarandache LCM function; pseudo Smarandache function $Z(n)$; equations; positive integer solution